جامعة بنغازي –كلية التّربية

مجلة كلية التربية ... العدد السادس عشر ... ديسمبر 2024

# حل المعادلات التكاملية لفولتيرا ذات الرتب الكسري باستخدام كثيرات حدود تشيبيشيف بطريقة عددية

الاسم: هناء مرعي محمد –محاضر مساعد –قسم الرياضيات –جامعة بنغازي

كلية الآداب والعلوم –قمينس

# Solving Volterra Integral Equations Of Fraction Order Using Chebyshev Polynomials By Numerical Method

**Hana Mare Mohammed Assistant Lecturer -Department of Mathematics – College of Arts and Sciences–Ghemines – University of Benghazi**

hanamarai788@gmail.com

**ملخص البحث:**

تناول هذه الورقة البحثية الطريقة العددية لحل المعادلات التكاملية لفولتيرا من النوع الأول والثاني الناتجة من معادلة ابل التكاملية حيث تضمنت دراسة والمصفوفات التنفيذية لكثير حدود تشيبيتشيف واستعمالها في حل بعض المعادلات التكاملية، وذلك بتحويل المعادلات التكاملية لفولتيرا الي نظام جبري خطي.

**الكلمات المفتاحية:** المعادلات التكاملية لفولتيرا ، معادلة ابل التكاملية، كثيرات حدود تشيبيشيف، المصفوفة التنفيذية لكثير حدود تشبيتشيف

**Abstract:**

This research paper deals with the numerical method for solving Voltaire integral equations of the first and second kind resulting from the Abel integral equation, as it included the study of the executive matrices of cheyshev polynomials and their use in solving some integral equations by transforming the integral equations volterra to a linear algebraic system.

**Key words:** Volterra integral-differential of the first and second kinds equations, Abel' integral equations, Chebyshev polynomials, Operational matrix.

## 1.1 مقدمة:

اعتمد العديد من علماء الرياضيات من أجل تقريب الدوال على كثيرات الحدود من أجل حل العديد من المسائل الرياضية حيث ظهرت الكثير من الطرق العددية لحل المعادلات التكاملية وعلى سبيل المثال حل حالات خاصة من معادلات التكاملية لفولتيرا المفرد من النوع الأول والثاني وهي معادلات آبل التكاملية ، المعرفة بواسطة:

$$f(x) = \int_0^x |x-t|^{-\alpha} y(t)dt \qquad (1)$$

$$y(x) = f(x) + \int_0^x |x-t|^{-\alpha} y(t)dt \qquad (2)$$

$$0 < \alpha < 1: \quad 0 \le x \le T$$

حيث $f(x) \in C[0,T]$ هي الدالة المعروفة و $y(x)$ هي دالة غير معروفة يتم تحديدها ، وتكون T ثابت موجب .

تاريخيا مشكلة آبل هي المشكلة الأولى التي أدت إلى دراسة معادلات التكاملية . معادلات آبل التكاملية المعممة على جزء محدود ظهرت في ورقة لأول مرةZeilon. (Zeilon,1924: 1–19)

المرجع الشامل لمعادلات آبل التكاملية بما في ذلك قائمة واسعة من التطبيقات، يمكن العثور عليها في (Nieto J.J,Okrasinski.w ,1997 : 231–240)

(Okrasinski.W,Vila.S1998: 85–89) ولحل هذه المعادلات نعتمد على كثيرات الحدود .

التطرق لحل بعض المعادلات التكاملية لفولتيرا المفرد من النوع الأول والثاني الناتجة من معادلات آبل التكاملية بواسطة كثيرات حدود تشيبيتشيف الذي يعتبر أحد أقدم كثيرات الحدود نسبيا والذي يعود انشاءه من طرف العالم الرياضي تشيبيتشيف

الحساب الكسري عملية رياضية ظهر ت في سنة 1695 على يد العالم لايبنز ثم تطور حتى العصر الحديث وبعد الثورة التكنولوجية وجدت طريقها للاستخدام في مختلف ميادين العلمية وخاصة الهندسة والفيزياء والميكانيك والكهرباء...

## 2.1 الدوال الخاصة:

### 1.2.1 الدالة جاما:(سميرة الأمين، 2021)

تعريف 1.2.1 تعرف دالة جاما كالاتي:

$$\Gamma(n)=\int_{0}^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx \quad ,n>0$$

قواعد أساسية:

إذا كان  nعددا صحيحا وموجبا فأن:

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n) \qquad ,\forall\neq 0$$

$$\Gamma(n+1)=n!$$

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

### 2.2.1 الدالة بيتا: (سميرة الأمين، 2021)

تعريف 2.2.1الدالة بيتا من الدوال الاساسية في الحساب الكسري تعطى كالاتي:

$$B(m,n)=\int_{0}^{1} x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \quad n>0\,,m>0$$

### 3.2.1 علاقة دالة جاما وبيتا

وتعطي العلاقة بين جاما وبيتا بالشكل الاتي :

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad n>0,m>0$$

## 3.1 الاشتقاق ذي الرتب الكسرية

### 3.1.1 الاشتقاق الكسري لريمان ليوفيل :

تعريف 3.1.1 لتكن $f \in C[a,b], x \in [a,b]$ ،الاشتقاق الكسري لريمان ليوفيل للدالة f في نقطة x يعرف كايلي: (Shantanu Das,2011)

$$ {}_aD_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_a^x (x-t)^{-\alpha}dt \quad ,a<t<x \quad (1.1)$$

$$ {}_xD_b^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_x^b (x-t)^{-\alpha}dt \quad ,x<t<b$$

اشتقاق دالة ثابتة بواسطة ريمان ليوفيل

$$ {}_a^RD_t^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$$

### 2.3.1 الاشتقاق الكسري لكابيتو :

تعريف 2.3.1 لتكن الدالة $f \in C[0,\infty]$ الاشتقاق للدالة يعرف f كايلي (Fakhrodin Mohammad 2014)

$$D^{\alpha} f(x) = \begin{cases} \dfrac{d^n f(t)}{dt^n} & \alpha = n \in \mathrm{N} \\ \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\displaystyle\int_0^t (t-\mathrm{T})^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\mathrm{T})d\mathrm{T} & t>0,(n-1<\alpha<n) \end{cases} \quad (2.1)$$

### 3.3.1 العلاقة بين الاشتقاق الكسري لريمان ليوفيل وكابيتو:

لتكن الدالة $f \in C[0,\infty]$ :

$$I^{\alpha} D^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^k(0^+)\frac{t^k}{k!} \quad t>0(n-1<\alpha<n) \quad (3,1)$$

## 4.1 التكامل ذي الرتب الكسرية

### 1.4.1 التكامل ذي الرتب الكسرية لريمان ليوفيل

تعريف 1.4.1:لتكن $f \in C[a,b],\ 0<\alpha<1$ التكامل الكسري لريمان ليوفيل يعرف كمايلي:

$$ {}_aI_x^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \qquad x\in[a,b];\alpha>0 \quad (4.1)$$

$${}_{x}I_{b}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{b} (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

## 5.1 المعادلات التكاملية الخطية

تعريف 1.5.1: لتكن معادلة تكاملية تعطي بالعلاقة:(معروف بسوت لليش، 2008)

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t) u(t) dt \qquad (5.1)$$

حيث $K(x,t)$ يسمى النواة التكاملية للعلاقة $(5.1)$ $\beta(x),\alpha(x)$ هما حدود التكامل حيث $u(x)$ تابع غير معرف، $\lambda$ هو عدد ثابت.

الهدف من هذا هو تحديد التابع المجهول $u(x)$ يمكن حل العلاقة $(5.1)$.

### 1.5.1المعادلات التكاملية لفولتيرا:

المعادلات التكاملية الخطية لفولتيرا كالتالي:

$$\phi(x) u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} K(x,t) u(t) dt \qquad (6.1)$$

اذا كان التابع $\phi(x) = 0$ فان المعادلة $(6.1)$ تصبح:

$$f(x) + \lambda \int_{a}^{x} K(x,t) u(t) dt = 0 \qquad (7.1)$$

تعرف بمعادلة فولتير من النوع الأول

ومن اجل $\phi(x) = 1$ فان المعادلة $(6,1)$ فتصبح :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} K(x,t) u(t) dt \qquad (8.1)$$

وهذه المعادلة معروفة باسم معادلة فولتيرا من النوع الثاني.

### 2.5.1 المعادلات التكاملية لفريدهول:

المعادلات التكاملية الخطية لفريدهول هو النموذج التالي:

$$\phi(x) u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} K(x,t) u(t) dt \qquad (9.1)$$

وحدود التكامل a و bثابتة.

اذا كان التابع $\phi(x)=0$ فان المعادلة $(9.1)$ تصبح:

$$f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt=0 \qquad (10.1)$$

تعرف بمعادلة فريدهول من النوع الأول.

ومن اجل $\phi(x)=1$ فان المعادلة $(8.1)$ فتصبح

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (11.1)$$

وهذه المعادلة معروفة باسم معادلة فريدهول من النوع الثاني.

## 1.2 كثير حدود تشيبتشيف ومصفوفات العمليات:

### 1.1.2كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الأول

نعرف كثيرات حدود تشيبيتشيف من النوع لأول من الدرجة n بالشكل التالي:

(Azim Rivazl,Samane Jahan,Farzaneh Yousefi2015: 001–011 )

$$T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x) \quad (n\geq 0) \qquad (1.2)$$

$$T_0(x)=0$$
$$T_1(x)=x$$
$$T_{n+1}(x)=2xnT_n(x)-T_{n-1}(x) \quad n=1,2,3,\Lambda$$

**نظرية1.2 1:** كثيرات حدود تشيبيتشيف من النوع الأول متعامدة على المجال $[-1,1]$بالنسبة لدالة الوزن $w=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ بحيث:

(M.Nosrati Sahlan ,H. Feyzollahzaded,2017)

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{bmatrix} 0 & ;n\neq m \\ \dfrac{\pi}{2} & ;n=m\neq 0 \\ \pi & ;m=n=0 \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

### 2.1.2كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الثاني (M. A. Darani, M .Nasiri ,2013) $U_n(x)$

نعرف كثيرات حدود تشيبيتشيف من النوع الثاني من الدرجة n على المجال $[-1,1]$بالشكل التالي

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \qquad (3.2)$$

حيث $\theta = are\cos(x)$

$U_0(x) = 1$
$U_1(x) = 2x$

حيث يحقق العلاقة الدالة التالية:

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) \qquad n = 2,3,\ldots$$

## 3.1.2 كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الثالث $V_r(x)$: Olagungu,A.S.Joseph (Folake ,2013)

نعرف كثيرات حدود تشيبيتشيف من النوع الثالث من الدرجة n على المجال $[-1,1]$بالشكل التالي:

$$V_r(x) = \frac{\cos(r+\frac{1}{2})\theta}{\cos(\frac{1}{2}\theta)} \qquad (4.2)$$

حيث $x = \cos\theta$

$$V_{r+1}(x) = 2xV_r(x) - V_{r-1}(x)$$

مع الشروط الأولية:

$V_0(x) = 1$
$V_1(x) = 2x - 1 \quad , r = 1,2$

## 4.1.2كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الرابع $W_r(x)$: (Olagungu,A.S.Joseph Folake,2013)

نعرف كثيرات حدود تشيبيتشيف من النوع الرابع من الدرجة n على المجال $[-1,1]$ بالشكل التالي

$$W_r(x) = \frac{\sin(r+\frac{1}{2})\theta}{\sin(\frac{1}{2}\theta)} \qquad (6.2)$$

نضطر احيانا في دراسة كثير حدود تشيبيتشيف تحويله من المجال الى المجال $[-1,1]$ الى $[0,1]$ وهذا ما يسمى بمحول كثير حدود تشيبيتشيف .

### 5.1.2 محول كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الاول $T_r^*(x)$:

( M.El-Kady,Amaal El-sayed, 2013)

محول كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الاول $T_r^*(x)$ يعرف كمايلي:

$$T_n^*(x) = \cos(2n\theta) \qquad (7.2)$$

حيث $0 \le x \le 1$ , $x = \cos^2\theta$ العلاقة تعطي كما يلي :

$$T_n^*(x) = 2(2x-1)T_{n-1}^* - T_{n-2}^*(x) \qquad n = 2,3,\ldots \qquad (8.2)$$

الشروط الأولية:

$$T_0^*(x) = 1$$
$$T_1^*(x) = 2x-1$$

**تعريف 5.1.2** محول كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الأول معرف علي النحو التالي:

$$\int_0^1 T_i^*(x)T_j^*(x)W(x)dx = \begin{cases} 0 & i \ne j \\ \pi & i = j = 0,\ 0 \le i \quad , j \le \mathrm{N} \\ \dfrac{\pi}{2} & \end{cases} \qquad (9.2)$$

### 6.1.2 محول كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الثاني : $U_n^*$

(M. A. Darani, M Nasiri,2013)

كثير حدود تشيبيتشيف المعرف على المجال $[0,1]$ يسمى كثير حدود تشيبيتشيف المحول ويكون بتغيير المتغير $2x-1$ ومنه.

$$U_n^*(x) = U_n(2x-1) \qquad (10.2)$$

كثير حدود تشيبيتشيف المحول يحقق العلاقة التالية:

$$U_n^*(x) = (4x-2)U_{n-1}^*(x) - U_{n-2}^*(x) \qquad n = 2,3,\ldots \qquad (11.2)$$

والحدود الأولية:

$$U_0^*(x)=1$$
$$U_1^*(x)=4x-2$$

وشروط التعامد:

(12.2)

$$\int_0^1 U_m^*(t)U_n^*(t)W(t)dt=\tau\delta_{mn}$$

حيث $\tau=\frac{1}{8}\pi,$ $w(t)=\sqrt{1-t^2}$ , $\delta_{mn}$دالة كرونيكير وفق المرجع(A.Nkwanta,E.R.Barnes,2012: 1-19) نستطيع الحصول على معادلة التابع لكثير حدود تشيبتشيف

$$A.U=T \qquad (13.2)$$

**حيث**

$$T=\left[1,t,t^2,\ldots,t^N\right]^T$$
$$U=\left[U_0^*(t),U_1^*(t),\ldots,U_N^*(t)\right]$$

حيث المصفوفة A هي من $(N+1)*(N+1)$كما انها مصفوفة سفلي حيث عناصرها معرفة كالتالي:

$$A[i,j]=\frac{1}{4^{i-j}}\frac{j}{j}(2i,i-j) \qquad ,i,j=1,2,\Lambda\ N+1$$

## 2.2مصفوفات العمليات لكثير حدود تشيبتشيف:

( M.Nosrati Sahlan ,H. Feyzollahzaded,2017)

### 1.2.2 مصفوفة كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الاول:

يمكن يمتثل كثيرة حدود شيبيشيف من النوع الأول بمصفوفة التالية:

$$T(X)=(T_0(x),T_2(x),..T_n(x))^T \qquad X=(1,x,\ldots,x^n)^T$$

**يمكن ان نكتب**

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & t_{21} & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_{31} & t_{32} & 2^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & t_{41} & t_{42} & t_{43} & 2^3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \cos(\frac{n\pi}{2}) & t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & t_{n4} & \dots & \dots & 2^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (14.2)$$

حيث $t_{i0} = \cos(\frac{i\pi}{2}) \quad , i = 0,1,\dots,n$

والعناصر الأخرى معرفة

$$t_{ij} = Sign(t_{i-1.j-1})(2|t_{i-1.j-1}| + |t_{i-2j}|)$$

### 2.2.2 مصفوفة محول كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الأول:

كثير حدود تشيبيتشيف معرفة علي المجال $[-1,1]$،لكن مجال التكامل $(1)$و$(2)$هو$[0,T]$ ولتحويل المجال من $[-1,1]$الي $[0,T]$نعرف المصفوفة R ∈ (n + 1) × (n + 1) : [2]

$$R_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j}\gamma_1^{i-j}\gamma_2^{j}, j = 0,1,..i \quad i = 0,1,..n \\ 0, i < j \end{cases} \qquad (15.2)$$

$R_{ij}$مصفوفة التحويل من أساس لآخر حيث

$$\gamma_1 = -1, \quad \gamma_2 = \frac{2}{T}$$

T المصفوفة التنفيذية لمحول كثير حدود تشيبيتشيف من النوع الاول يكتب الاساس القانوني حيثW=TR و T مصفوفة كثير حدود تشيبيتشيف

**تقريب الدالة**

الدالة $y(x) \in L_2[0,T]$ يمكن التعبير عنها بواسطة كثير حدود تشيبيتشيف المحول :

$$Y(x) = \sum c_j \varphi_j(x)dx = C^T WX \qquad (16.2)$$

حيث W مصفوفة محول كثير حدود تشيبيتشيف . و $\varphi_j$كثير حدود تشيبيتشيف المحول من درجة j, المعاملات $c_j$تعطى بواسطة

$$c_j = \frac{2}{\pi}\int_0^T \frac{f(x)\varphi_j(x)}{\sqrt{\frac{4x}{T}-\frac{4x^2}{T^2}}}dx, \qquad j = 0,1,2,\ldots$$

## 3.2.2المصفوفة التنفيذية للتكامل لكثير حدود تشيبيتشيف من النوع الأول:

(A.Rivazl,Samane Gahan,Farzaneh Yousefi,2015)

كثيرات حدود تشيبيشيف يحقق الخاصية:

$$\int_{-1}^{x} T_{N-1}(s)ds = \frac{1}{2N}T_N(x) - \frac{1}{2(N-2)} - T_{N-2}(x) + \frac{(-1)^{N-1}}{1-(N-1)^2}T_0(x)$$

$N \geq 3$

حيث ان $T_0(x), T_1(x)$

$$\int_{-1}^{x} T_0(s)ds = T_0(x) + T_1(x) \qquad (17.2)$$

$$\int_{-1}^{x} T_1(s)ds = \frac{-1}{4}T_0(x) + \frac{1}{4}T_2(x) \qquad (18.2)$$

من $(17.2)$و$(18.2)$ يكون

$$\int_{-1}^{x} T(s)ds = PT(x)$$

حيث $P \in (N+1)\times(N+1)$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{-1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots \\ \frac{(-1)^{N-1}}{1-(N-1)^2} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{2N} \\ \frac{(-1)^{N}}{1-(N)^2} & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{-1}{2N-2} & 0 \end{bmatrix}, N \geq 3$$

### 4.2.2 المصفوفة التنفيذية للتكامل الكسري لكثير حدود تشيبتشيف:

(M.Nosrati Sahlan ,H. Feyzollahzaded,2017)

التكامل الكسري لكثير حدود تشيبتشيف يمكن ان يكتب على الشكل التالي:

$$I^{\alpha}(TX) = (A * T)X^{\alpha} \qquad (19.2)$$

حيث TX هو مصفوفة كثير حدود تشيبتسيف و

$$X^{\alpha} = x^{\alpha}.X = \left[x^{\alpha} x^{\alpha+1} \Lambda \ x^{\alpha+n}\right]^{T}$$

وكذلك عملية * هي عملية ضرب عنصر بعنصر وهي المصفوفة المثلثية السفلية المحددة بواسطة:

$$A_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(\alpha+j+1)}, & i \geq j \\ 0\,, & i < j \end{cases} \qquad (20.2)$$

و دالة g(x)هي دالة تشيبيبتشيف المحول $g(x) = D^{T}WX$ التكامل الكسري يمكن كتابتها :

$$I^{\alpha}(g(x)) = I^{\alpha}(D^{T}WX) = D^{T}(A * W)X^{(\alpha)} \qquad (21.2)$$

## 3.1 حل معادلات التكاملية باستخدام كثير حدود تشيبتشيف

حل معادلات تكاملية لفولتير من النوع الأول والثاني باستعمال محول كثير حدود تشيبشيف ،وهي معادلات ابل التكاملية (1)و(2) (M.Nosrati Sahlan ,H. Feyzollahzaded,2017)

باستخدام حساب ريمان نضع $-\alpha = \beta - 1$ ومنه

$$\int_{0}^{x} (x-t)^{-\alpha} y(t)dt = \Gamma(\beta)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{0}^{x}(x-t)^{\beta-1} y(t)dt$$

ومن تعريف التكامل الكسري لريمان ليوفيل بمكن كتابة :

$$\int_{0}^{x} (x-t)^{-\alpha} y(t)dt = \Gamma(\beta) I^{\beta} y(x) \qquad (1.3)$$

الدالة $y(x)$ تقرب بواسطة كثير حدود تشيبتشيف المحول بالتالي:

$$y(x) \simeq y_{n}(x) = C^{T}WX \qquad (2.3)$$

حيث $C^T$ هو الشعاع المجهول الذي يتم تحديده و $W$ المصفوفة محول كثير الحدود تشيبتيشف

### 3.1.1معادلات لفولتيرا الشاذة من النوع الأول:

معادلة التكاملية لفولتيرا نوع الأول وفقا لمعادلة (3.1) لدينا:

$$f(x) = \Gamma(\beta) I^{\beta} y(x) \qquad (3.3)$$

استبدال المعادلات (16.2) (1.3) في (3.3) يمكننا الحصول عليها:

$$f(x) = \Gamma(\beta) C^T (A * W) X^{\beta} \qquad (4.3)$$

لحل المعادلات هذه نقوم باستعمال طريقة (Galerkin) باستعمال كثير حدود تشيبتشيف المحول

نضع

$$\Gamma(\beta)(A * W) = \Lambda$$

ليكن $\varphi_i(x)$ كثير حدود تشيبتشيف المحول من الدرجة i كما يلي:

$$\varphi_i(x) = W_i X \quad , i = 0,1,\ldots,n$$

حيث $W_i$ اهو صف من المصفوفة نضرب (4.3) في $\varphi_i(x)$ نحصل علي:

$$C^T \Lambda X^{\beta} W_i X = f(x) W_i X_i, \quad i = 0,1,\ldots,n$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \\ x & x^2 & x^3 & \ldots & x^{n+1} \\ & & & \ldots & \\ x^n & x^{n+1} & x^{x+2} & \ldots & x^{2n} \end{bmatrix} \qquad (5.3)$$

ونحصل علي

$$\tilde{X}^{\beta} = x^{\beta} \tilde{X}$$

$$C^T \Lambda \tilde{X} W_i^T = f(x) W_i X \qquad , i = 0,1,2,\ldots,n \qquad (6.3)$$

باستعمال التكامل من 0 الي Tنتحصل:

$$W_i P^{\beta} \Lambda^T C = W_i P_x \qquad (7.3)$$

حيث $P_X, P^{\beta}$ بمصفوفة التكامل كما يلي:

$$P_x = \int_0^T Xf(x)dx, \quad (P_x)_{iI} = \int_0^T x^i f(x)dx$$

$$P^{\beta} = \int \tilde{X}^{\beta} dx, \quad (P^{\beta})_{ij} = \frac{T^{i+j+\beta+1}}{i+j+\beta+1}$$

$$i = 0,\dots,n, \qquad j = 0,\dots,n$$

باعتبار المعادلة (7.3) من اجل i=0,…,n

نتحصل علي:

$$WP^{\beta}\Lambda^T C = WP_x \qquad (8.3)$$

### 2.1.3 معادلات لفولتيرا الشاذة من النوع الثاني:

المعادلات التكاملية (2) لدينا:

$$y(x) = f(x) + \int_0^x (x-t)^{-\alpha} y(t)dt = f(x) + \Gamma(\beta) I^{\beta}(C^T WX) \qquad (9.3)$$

المعادلة (9.3)

$$C^T WX - \Gamma(\beta) C^T (A * W) X^{\beta} = f(x) \qquad (10.3)$$

نضرب المعادلة (10.3) في $\varphi_i(x)$ والتكامل من 0 الي T نكتب المعادلة كما يلي:

$$(WPW^T - WP^{\beta}\Lambda^T)C = WPf(x) \qquad (11.3)$$

حيث

$$P = \int_0^T \tilde{X} dx \quad , \quad p_{ij} = \frac{T^{i+j+1}}{i+j+1}$$

## 2.3 امثلة:

لإظهار دقة وكفاءة الطريقة الموضحة بعض الأمثلة، علاوة علي ذلك رقم شرط المصفوفات التنفيذية محددة من قبل

(M.Nosrati Sahlan ,H. Feyzollahzaded,2017)

$$cand(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \qquad (12.3)$$

ويشير الاختصار c.n.m في الجداول رقم للمصفوفة التنفيذية.

**مثال 2.3.1:** ليكن معادلة فولتيرا من النوع الأول:

(M.Nosrati Sahlan ,H. Feyzollahzaded,2017)

$$\int_0^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\frac{2}{3}}} dt = \pi x$$

والحل الدقيق $y(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4} x^{\frac{2}{3}}$

الحل ل y(x_) يمكن الحصول عليها في من اجل N=4,8.12 يتم الحصول علي معاملات مجهولة ل $c_i$.

بأخذ N=4

$C_0 = 0.7539,\ c_1 = 0.5968,\ c_2 = -0.0738,$

$c_3 = 0.0212,\ c_4 = -0.0118.$

الحل التقريبي ل

$Y_4(x) = -1.5114x^4 + 3.7014x^3 - 3.4978x^2$

$+ 2.5439x - 0.0502.$

| x | N=4 | N=8 | N=12 | Exact |
|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.2732 | 0.2815 | 0.2797 | 0.2788 |
| 0.2 | 0.4445 | 0.4463 | 0.4433 | 0.4443 |
| 0.3 | 0.5863 | 0.5823 | 0.5820 | 0.5822 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0.4 | 0.7063 | 0.7058 | 0.7052 | 0.07052 |
| 0.5 | 0.8159 | 0.8178 | 0.8185 | 0.8183 |
| 0.6 | 0.9209 | 0.9239 | 0.0242 | 0.9241 |
| 0.7 | 1.0237 | 1.0242 | 1.1194 | 1.0241 |
| 0.8 | 1.1227 | 1.1191 | 1.1194 | 1.1195 |
| 0.9 | 1.2131 | 1.2110 | 1.2110 | 1.2109 |
| 1 | 1.2863 | 1.2951 | 1.2995 | 1.2990 |
| c.n.m | 16.01 | 40.32 | 64.18 | |

شكل 1.3: الجدول 1: يمثل الحل المضبوط والتقريبي

**مثال3.2.2 :** لتكن معادلة فولتيرا من النوع الثاني :

(M.Nosrati Sahlan ,H. Feyzollahzaded,2017)

$$y(x)+\int \frac{y(t)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt = x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{8}\pi x^{2}$$

الحل الدقيق $y(x)=x^{\frac{3}{2}}$

الحل ل $y(x)$ يمكن الحصول عليها بالطريقة في النوع الثاني من اجل N=4,8,12 يتم الحصول علي معاملات مجهولة ل $c_i$ من خلال الطريقة الموضحة سابقا وبأخذ

$C_0 = 0.4242,\ c_1 = 0.5097\ ,\ c_2 = 0.0724\ ,\ c_3 = -0.0076\ ,\ c_4 = 0.0018$

ويتم حساب الحل التقريبي لci كما يلي:

$Y_4(x) = 0.2253x^{4} + 0.6927x^{3} + 1.2240x^{2} + 0.2477x - 0.0038$

| x | N=4 | N=8 | N=12 | Exact |
|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.0326 | 0.0316 | 0.0316 | **0.0316** |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0.2 | 0.0896 | 0.0895 | 0.0894 | **0.0894** |
| 0.3 | 0.1638 | 0.1643 | 0.1643 | **0.1643** |
| 0.4 | 0.2526 | 0.2529 | 0.2530 | **0.2530** |
| 0.5 | 0.3536 | 0.3536 | 0.3536 | **0.3536** |
| 0.6 | 0.4651 | 0.4648 | 0.4648 | **0.4648** |
| 0.7 | 0.5859 | 0.5856 | 0.5857 | **0.5857** |
| 0.8 | 0.7154 | 0.7155 | 0.7155 | **0.7155** |
| 0.9 | 0.8535 | 0.8538 | 0.8538 | **0.8538** |
| 1 | 1.0006 | 1.0001 | 1.0000 | **1.0000** |
| c.n.m | 11.23 | 22.32 | 32.85 | |

شكل2.3: الجدول 2: يمثل الحل المضبوط والتقريبي

## خلاصة البحث :

البحث عبارة عن دراسة تحليلية، وإعطاء لمحة قصيرة عن الحساب الكسري (الاشتقاق و التكامل) و كيفية حسابهما ثم عرفنا كثير حدود تشيبيتشيف وخصائصها والمصفوفات التنفيذية لكثير حدود تشيبيتشيف واستعمالها في حل بعض المعادلات التكاملية . واقتصرت تطبيقاتها على بيان كيفية تطبيق المصفوفة التنفيذية للتكامل في حل معادلات التكاملية لفولتيرا الناتجة عن معادلات ابل التكاملية من خلال تعرضنا إلى بعض أمثلة لتسهيل الفهم وتعميم الفائدة حول استعمال المصفوفة التنفيذية للتكامل والمصفوفة التنفيذية للاشتقاق لكثير حدود تشيبيتشيف في تقريب في حل بعض المعادلات التكاملية ،وما قدم في البحث هذه ما هوإلا جزء من البحوث المقدمة في مجال معادلات أبل التكاملية.

**المراجع العربية:**

1) د- سميرة الأمين محمد سليمان ،الدوال الخاصة ،منشورات مركز العلوم والتقنية للبحوث والدراسات ،2021.

2) د- معروف بسوت لليش ،المعادلات التكاملية وحساب التحويلات ،منشورات جامعة حلب ،كلية العلوم ،سوريا 2007-2008.

## المراجع الأجنبية:

1) Azim Rivazl. Samane Jahan ara. Farzaneh Yousefi, Two-dimensional Chebyshev Polynomials for Solving Two-dimensional Integro-Differential Equations. Cankaya University Journal of Science and Engineering Volume 12, No. 2 (2015) 001–011.

2) A.M.Wazawaz,The combined laplace transform-Adomian decomposition method for handling nonlinear Volterra integro -differential equations,Appl.Math.comput.216(2010)13041309.

3) A.Nkwanta and E.R.BarnesTwo Catalan-type Riordan arrays and their connections to the Chebyshev polynomials of the first kind.Journal of Integer Sequences,15(2012)1-19.

4) FakhrodinMohammadi,Numerical solution of Bagley-Torvik equation using Chebyshev wavelet operational matrix of fractional derivative.Int. J. Adv. Appl. Math. andMech. ISSN: 2347-2529.2(1) (2014) 83 – 91.

5) Mohammadreza Ahmadi Darani. Mitra Nasiri,A fractional type of the Chebyshev polynomials for approxima-tion of solution of linear fractional differential equations,Computational Methods for Differential Equations http://cmde.tabrizu.ac.ir Vol. 1, No. 2, 2013, pp. 96-107.

6) Monireh Nosrati Sahlan . Hadi Feyzollahzadeh R,Operational matrices of Chebyshev polynomials for solving singular Volterra integral equations.Received: 25 November 2016 / Accepted: 10 March 2017.

7) M. El-Kady, Amaal El-Sayed,FRACTIONAL DIFFERENTIATION MATRICES FOR SOLVING FRACTIONAL ORDERS DIFFERENTIAL EQUATIONS.International Journal of Pure and Applied Mathematics Volume 84 No. 2 2013, 1-13.

8) Nieto, J.J., Okrasinski, W.:Existence, uniqueness, and approximation of solutions to some nonlinear diffusion problems. J. Math. Anal. Appl. 210(1), (1997)231–240.

9) Olagunju, A. S. Joseph Folake L.,Third-kind Chebyshev Polynomials Vr(x) in Collocation Methods of Solving Boundary value Problems.IOSR Journal of Mathematics (IOSRJM) e-ISSN: 2278-5728,p-ISSN: 2319-765X, Volume 7, Issue 2 (Jul. - Aug. 2013), PP 42-47

10) Okrasinski. W, Vila, S , Determination of the interface position for some nonlinear diffusion problems. Appl. Math. Lett. 11(4),(1998) 85–89.

11)Shantanu Das, Functional Fractional Calculus,Doi10.1007/978-3-642-20545-3,ISBN 978-3-642-20544-6,2011 Springer-Verlin Heidelberg.

12)Zeilon, N.:Sur quelques points de la theorie de l’equation integrale d’Abel [On some points of the theory of integral equation of Abel type]. Arkiv. Mat. Astr. Fysik. 18, (1924)1–19.