جامعة بنغازي –كلية التّربية

ديسمبر 2025 مجلة كلية التربية ... العدد التاسع عشر ...

مجلة كلية التربية العلمية

مقارنة بين بعض طرق الاستكمال بكثيرات حدود لاغرانج التقليدية والمعدلة و نيوتن و كثيرات حدود تشيبيشيف

Comparison of Some Interpolation Methods Using Traditional and Modified Lagrange Polynomials, Newton's Method, and Chebyshev Polynomials.

سعاد أحمد أبو مريم – أستاذ مشارك

حميدة محمد عبدالله عثمان – محاضر مساعد

Hamida Mohammed Abdulla Othman

Souad A. Abumaryam

قسم الرياضيات،كلية العلوم، جامعة سرت ، سرت ، ليبيا

قسم الرياضيات،كلية العلوم، جامعة الجفرة ، الجفرة ، ليبيا

hamida.othman@ju.edu.ly

الملخص

تهدف هذه الورقة البحثية لمقارنة طرق الاستكمال بكثيرات الحدود لاغرانج المعدلة المختلفة: لاغرانج التقليدية، لاغرانج المعدلة الاولى، ولاغرانج المعدلة الثانية (Barycentric)، بالإضافة الى طريقة نيوتن والاستكمال بكثيرات حدود تشيبيشيف. حيث يتم دراسة كل من هذه الطرق عند استخدام نقاط متساوية البعد وجذور تشيبيشيف كنقاط استكمال. مع التركيز على كيفية تحسين دقة التقريب من خلال اختيار وتوزيع النقاط، كما يتم تعيين بعض المزايا والعيوب لكل طريقة.

الكلمات المفتاحية:

الاستكمال

التقريب

جذور تشيبيشيف

كثيرات الحدود

لاغرانج

Comparison of Some Interpolation Methods Using Traditional and Modified Lagrange Polynomials, Newton's Method, and Chebyshev Polynomials.

ABSTRACT

This research paper aims to compare different polynomial interpolation methods: traditional Lagrange, first modified Lagrange, second modified Lagrange) Barycentric form) , in addition to Newton’s method and Chebyshev polynomial interpolation. Each of these methods is studied using both equally spaced points and Chebyshev points, focusing on how to improve approximation accuracy through point selection and distribution. Additionally, some advantages and disadvantages of each method are assessed.

Keywords:

Approximation

Chebyshev roots

Interpolation

Lagrange

Polynomial

1. المقدمة

في العديد من التطبيقات العملية في مجالات الرياضيات والهندسة والفيزياء، أُستخرجت البيانات من تجارب أو قراءات معينة تمثل دوال معقدة يصعب التعامل معها رياضيًا. هذه التعقيدات تجعل من العمليات الرياضية مثل التفاضل والتكامل أكثر تعقيدا، خاصة عندما تعطى الدوال بشكل جدولي. في مثل هذه الحالات، يصبح من الضروري إيجاد صيغ تقريبية بديلة لتسهيل الحسابات وتوفير حلول دقيقة.

يُعد استخدام كثيرات الحدود لتقريب الدوال المتصلة أحد أكثر الحلول شيوعا، وذلك استنادًا إلى نظرية ويرشتراس (Weierstrass) التي تنص على إمكانية تقريب أي دالة متصلة على فترة مغلقة باستخدام دوال كثيرة الحدود.

تستخدم طرق الاستكمال، التي تهدف الى ايجاد منحنى يمر عبر مجموعة من النقاط المحددة، على نطاق واسع بسبب سهولة التعامل مع كثيرات الحدود وبساطتها، تتميز كثيرات الحدود باستمرارية المشتقات مما يمكننا من تقريب الدوال المعقدة. يمكن تحسين دقة الاستكمال بإضافة المزيد من النقاط أو الشروط، الا أن زيادة عدد النقاط قد تؤدي إلى مشكلة التذبذب على الأطراف، وهي إحدى الصعوبات التي تواجه الاستكمال باستخدام كثيرات الحدود، وهو ما يُعرف بظاهرة رونج (Runge phenomenon)

تعتمد مسألة تقريب الدالة في معظم الحالات على استخدام كثيرات الحدود، حيث توجد عدة طرق شائعة للاستكمال مثل طرق لاغرانج وطريقة نيوتن وكثيرات الحدود المتعامدة مثل تشيبيشيف. وكل من هذه الطرق تقدم مزايا وخصائص خاصة بها.

تتيح طريقة نيوتن مرونة في إضافة نقاط جديدة دون الحاجة إلى إعادة حساب المعاملات من البداية، مما يجعلها مناسبة للتطبيقات الديناميكية. من جهة أخرى، تستخدم كثيرات الحدود المتعامدة مثل تشيبيشيف لتقليل الخطأ الناتج عن توزيع النقاط بشكل غير منتظم، مما يجعلها فعالة في التطبيقات التي تتطلب دقة عالية.

تعد طريقة لاغرانج فعالة في تقريب الدوال عند مجموعة معينة من النقاط، وتتميز بالبساطة. ومع ذلك، قد تواجه هذه الطرق بعض التحديات مثل عدم الاستقرار الحسابي في حال تقارب النقاط أو توزيعها بشكل غير منتظم. بينما تعتبر كثيرات الحدود المتعامدة خيارا مفضلا في بعض الحالات، حيث أنها تقلل تأثير النقاط المتطرفة وتوفر تقريبات مستقرة ودقيقة.

في عمليات الاستكمال، يلعب اختيار النقاط دورًا كبيراً في تحسين دقة التقريب، من المهم اختيار النقاط المناسبة، وعادةً ما يمكن استخدام أية مجموعة من النقاط داخل الفترة المحددة. من أبسط الطرق هي استخدام نقاط متساوية البعد، ولكن هذه الطريقة قد تؤدي إلى مشاكل في التقارب والاستقرار الحسابي. على سبيل المثال، مصفوفة فانديرموند (Vandermond Matrix) التي قد تصبح قريبة من الشذوذ، مما يجعل حساب المعاملات عرضة لتراكم الخطأ.

على النقيض، يوفر اختيار نقاط تشيبيشيف، التي تتوزع بشكل أكثر تقاربًا عند نهايتي الفترة، استكمالا أكثر استقرارًا ودقة.

تُعد صيغة لاغرانج المعدلة الثانية (Barycentric Formula) من أكثر الصيغ شهرة وكفاءة

في مجال الاستكمال (Interpolation) حيث تمثل إعادة صياغة لصيغة لاغرانج التقليدية ولكن بطريقة أكثر استقرارًا من الناحية العددية. تمتاز هذه الصيغة بكون دالة الوزن Function (Weight) تعتمد فقط على نقاط الاستكمال، الأمر الذي يجعل حسابها يتم مرة واحدة فقط، وبشكل مستقل عن قيم الدالة المراد استكمالها. هذه الميزة تسمح بسهولة إدراج بيانات إضافية لاحقًا دون الحاجة لإعادة حساب الأوزان، وهو ما يشبه إلى حد كبير ما توفره صيغة فروق القسمة لنيوتن(Newton Divided Differences) .

بدأ الاهتمام بهذه الصيغة منذ منتصف القرن العشرين، حيث قام[9] Taylor (1945) بطرحها لأول مرة عند التعامل مع النقاط متساوية البعد، مبينًا فعاليتها في تحسين الاستقرار العددي بالمقارنة مع الطرق التقليدية. لاحقًا، أعاد Salzer (1972) [8] دراسة الصيغة عند استخدام نقاط تشيبيشيف(Chebyshev Nodes) وأبرز العديد من المزايا غير الملحوظة سابقًا، مما فتح آفاقًا جديدة في الاستكمال.

وفي بداية القرن الحادي والعشرين، قدّم Baltensperger و Trummer (2003)[4] دراسة حول الاختلافات الطيفية (Spectral Differencing) باستخدام هذه الصيغة، وبيّنوا أهميتها في التطبيقات العددية واسعة النطاق. ثم جاءت مراجعة شاملة من قبل Trefethen و Berrut(2004) حيث أعادا صياغة النظرية وربطاها بتطبيقات عملية في الاستكمال متعدد الحدود، الأمر الذي جعل هذه الصيغة محورًا لعدد متزايد من الأبحاث والدراسات في مجالات التحليل العددي والحوسبة العلمية.

في هذه الورقة، سنستعرض مقارنة لطرق الاستكمال بكثيرات الحدود، بما في ذلك طرق لاغرانج التقليدية، ولاغرانج المعدلة الاولى، ولاغرانج المعدلة الثانية صيغة Barycentric ، و نيوتن و الاستكمال بكثيرات حدود تشيبيشيف.

2.كثيرات حدود تشيبيشيف[6] Chebyshev Polynomials

تعريف 1: كثيرات حدود تشيبيشيف من النوع الأول $T_n(x)$ حيث $(n \geq 0)$ تعرف بالشكل التالي :

$$T_n(x) = \cos n\theta = \cos(n\cos^{-1} x)$$

حيث $x = \cos\theta$ ، $x \in [1,-1]$ ، و $\theta \in [0,\pi]$. يمكن كتابتها بالعلاقة التكرارية التالية:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

تعريف 2: تعرف كثيرة حدود تشيبيشيف من النوع الثاني $U_n(x)$ من الدرجة n بالعلاقة التالية:

$$U_n(x) = \sin(n\cos^{-1}x) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$$

حيث $x = \cos\theta$ ، $x \in [1,-1]$ ، $\theta \in [0,\pi]$.

تتحقق كثيرات حدود تشيبيشيف من النوع الثاني العلاقة التكرارية مثل ما في النوع الأول، وتختلف فقط في الشروط، يمكن تعريف كثيرات حدود تشيبيشيف $U_n(x)$ بالعلاقة التكرارية التالي.

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

حيث

$n \geq 2$ والشروط الابتدائية $U_0(x) = 1$ و $U_1(x) = 2x$

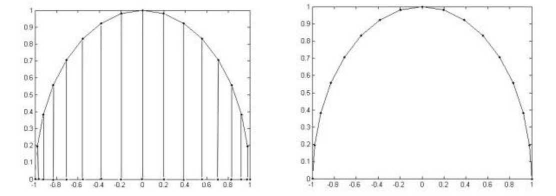
كثيرات حدود تشيبيشيف من النوع الاول $T_n(x)$ من الدرجة $n \geq 1$ ، تحتوي على n من الجذور (أصفار) في الفترة $[-1,1]$، ويتم إعطاء الجذور x_j بواسطة

$$x_j = \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2n}\right) \quad , \quad j = 1,2,\dots,n$$

أما جذور كثيرات حدود تشيبيشيف من النوع الثاني $U_n(x)$ بالعلاقة التالية:

$$\bar{x}_j = cos\frac{j\pi}{(n)} \quad , \quad j = 1,2,\dots,n$$

جميع جذور كثيرات حدود تشيبيشيف من النوع الأول والثاني هي أعداد حقيقية وتقع في الفترة $[-1,1]$. تعتبر جذور كثيرات حدود تشيبيشيف نقاط تشيبيشيف، ويمكن الحصول عليها من خلال تقسيم النصف العلوي من دائرة الوحدة الي $n+1$ جزء وثم بإسقاط هذه النقاط على المحور السيني للحصول على نقاط تشيبيشيف. (الشكل 1) يبين ذلك.



شكل 1: نقاط تشيبيشيف

3.الاستكمال بكثيرات حدود Polynomial Interpolation

3.1طريقة لاغرانج التقليدية[5] Classical Lagrange method

كثيرات حدود لاغرانج سميت هذا الاسم نسبة إلى العالم الفرنسي المشهور جوزيف لاغرانج (1813- 1736 lagrang.J.L).

تعريف 3: بفرض لدينا دالة f دالة متصلة على فترة ما $[a,b]$، وبفرض أن النقاط $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ وقيمها $\{f(x_j)\}_{j=0}^{n}$ ، المطلوب ايجاد حدودية من الدرجة $n \geq$ تمر من خلال هذه النقاط المعطاة يتم تكوين كثيرة حدود بحيث

$$L_j(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

وتحقق الشرط:

$$L_j(x_k) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

يكون لدينا التركيب الخطي

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x)\, f(x_j) \qquad (1)$$

حيث $p_n(x)$ كثيرات حدود لاغرانج من الدرجة اقل او تساوي n . صيغة لاغرانج الاستكماليه مهمة نظريا وسهلة الفهم والاستخدام، ويمكن تطبيقها بسهولة على مجموعة صغيرة من النقاط. ومع ذلك توجد بها بعض العيوب:

1. نحتاج الي $O(n^2)$ من العمليات الحسابية لإيجاد $p(x)$ لكل نقطة.
2. عند اضافة نقطة جديدة (x_{n+1}, y_{n+1}) فإننا لحساب $p(x)$ سنحتاج لعمليات حسابية جديدة مع كل نقطة جديدة.
3. قد ينتج تذبذب عند الاطراف إذا كانت n كبيرة، مما يؤذي إلى ظاهرة رونج (Runge's phenomenon).

بما أننا نحتاج الي حسابات جديدة مع كل نقطة جديدة تضاف للبيانات، هذه من العيوب التي تتصف بها طريقة لاغرانج الاستكمال، طريقة فروق القسمة عالجت هذا العيب حيث يتم إضافة حد جديد للحدودية عند إضافة نقطة جديدة للبيانات مع الاحتفاظ بالحسابات السابقة.

3.2 طريقة نيوتن لفروق القسمة [5] Newton Divided Differences

ليكن $p_n(x)$ كثيرات حدود لاغرانج من الدرجة اقل او تساوي n

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

حيث

$$a_0 = f(x_0) = f[x_0]$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

تعريف 4: فرق القسمة للدالة f بين $[x_i, x_{i+1}]$ يعرف بشكل عام بالعلاقة

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] =$$

$$\frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+k}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

يمكن توضيح ذلك من خلال الجدول التالي الذي يساعد في تسهيل الحسابات للحصول على الفروق القسمة:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1},$	$f[x_{i-1}, \dots, x_i]$
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		

يمكن كتابة الصيغة بالشكل:

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k]\,(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})$$

والتي تعرف بصيغة فروق القسمة الاستكماليه لنيوتن، وتحتاج الي $O(n)$ من العمليات الحسابية لحساب $p_n(x)$.

3.3طريقة لاغرانج المعدلة الأولى

The first modified Lagrange [3]

يمكن كتابة صيغة لاغرانج للاستكمال يمكن كتابتها بطريقة مختلفة تسمح بحسابها بحيث يمكن حسابها بتكلفة اقل، أي باستخدام أقل عدد ممكن من العمليات الحسابية. يتم التعبير عن ذلك بالصيغة:

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x) f(x_j) \qquad = l(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{w_j f(x_j)}{x - x_j} \qquad (2)$$

وتعرف هذه الطريقة بطريقة لاغرانج المعدلة الاولى وهي النسخة الاولي لـ *Barycentric interpolation formula*

تتميز طريقة لاغرانج المعدلة الأولى بتقليل من عدد العمليات الحسابية المطلوبة مقارنة بصيغة لاغرانج التقليدية. حيث نحتاج إلي $O(n^2)$ من العمليات الحسابية لحساب دالة الوزن، لكنها اسرع في حساب دالة الاستكمال $p_n(x)$ حيث نحتاج فقط إلي $O(n)$ من العمليات الحسابية. كذلك تحسب دالة الوزن مرة واحدة في البداية، وغالباً ما تكون أكثر

استقراراً عددياً، على الرغم من أنها تتطلب خطوات إضافية في الحسابات مقارنة بالصيغة التقليدية.

3.4 طريقة لاغرانج المعدلة الثانية[3]

Barycentric formula Interpolation

يمكن تحسين صيغة لاغرانج المعدلة الاولى بحيث تكون أكثر استخداما في التطبيقات العلمية. تعرف هذه باسم لاغرانج المعدلة الثانية أو *Barycentric interpolation formula.*

$$p_n(x) = \frac{\sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x - x_j} f(x_j)}{\sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x - x_j}} \qquad (3)$$

أثبتت هذه الطريقة كفاءتها عند نقاط متساوية البعد، حتى وإن كانت قيمة n كبيرة. تحتاج إلى $O(n)$ من العمليات الحسابية بعد حساب الوزن مسبقا لإيجاد $p_n(x)$.

4 . دالة الوزن [3] Weight Function

تعتمد دالة الوزن w_j فقط على نقاط الاستكمال، لذا عند اختيار نقاط الاستكمال يتم حساب دالة الوزن مرة واحدة، مما يتطلب الى $O(n^2)$ من العمليات الحسابية، كما أن دالة الوزن يمكن حسابها بشكل مستقل عن $f(x_j)$ ، مما يتيح استخدام هذه الميزة لدمج زوج بيانات جديدة. عند إضافة أي نقطة جديدة $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$ لن نحتاج الي إعادة الحسابات لدالة الوزن، مما يشبه ميزة فروق القسمة في طريقة نيوتن.

4.1.دالة الوزن عند نقاط متساوية البعد

تعريف 4: ليكن $x_1, x_2, \dots, x_n$ نقاط متساوية البعد علي الفترة $[-1,1]$ حيث $h = \frac{2}{n}$.

دالة الوزن w_j عند نقاط متساوية البعد تكون بالصورة التالية:

$$w_j = \frac{(-1)^{n-j}\binom{n}{j}}{h^n n!}$$

حيث

$$\prod_{\substack{k=o\\k\neq j}}^{n}(x_j - x_k) = \left[\prod_{\substack{k=o\\k\neq j}}^{j-1}(x_j - x_k)\right]\left[\prod_{\substack{k=j+1\\k\neq j}}^{n}(x_j - x_k)\right]$$

$$w_j = \frac{(-1)^{n-j}}{h^n (j!)(n-j)!}$$

$$= \frac{(-1)^{n-j} n!}{h^n n!\,(j!)(n-j)!} = \frac{(-1)^n}{h^n n!}\left[\frac{1}{(-1)^j}\right]\binom{n}{j}$$

$$w_j = (-1)^j \binom{n}{j}$$

ودالة الوزن w_j عند نقاط متساوية البعد علي الفترة $[a,b]$ حيث $x_j = a + hj$ و $h = \frac{b-a}{n}$. يمكن كتابتها بالصورة

$$w_j = (-1)^j \binom{n}{j} 2^n (b-a)^n$$

4.2 دالة الوزن عند جذور تشيبيشيف من النوع الأول

تعريف 5: ليكن $x_1, x_2, \dots, x_n$ جذور كثيرات حدود تشيبيشيف من النوع الاول فإن دالة الوزن تكون كالتالي:

$$w_i = (-1)^i \sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$$

حيث

$$x_i - x_j = -2\sin\left(\frac{(i+j-1)\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{(i-j)\pi}{2n}\right)$$

$$\prod_{i\neq j}(x_i - x_j) =$$

$$(-2)^{n-1}\frac{(-1)^{n-i}\sin\left(\frac{(1)\pi}{2n}\right)\dots\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)}$$

$$w_i = \frac{1}{\prod_{i\neq j}(x_i - x_j)} = (-1)^i \sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$$

4.3دالة الوزن عند جذور تشيبيشيف من النوع الثاني

تعريف 6: ليكن $x_1, x_2, \dots, x_n$ جذور كثيرات حدود تشيبيشيف من النوع الثاني فإن دالة الوزن تكون كالتالي:

$$w_j = (-1)^j \delta_j$$

$$\delta_j = \begin{cases} 1/2 & , j = 0 \;\; or \;\; j = n \\ 1 & \quad otherwise \end{cases}$$

حيث

$$x_i - x_j = -2\sin\left(\frac{(i+j-2)\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{(i-j)\pi}{2n}\right)$$

$$\prod_{i\neq j}(x_i - x_j) = (-2)^{n-1}ab$$

$$ab = (-1)^{n-i}\sin\left(\frac{(i-1)\pi}{2n}\right)\dots$$

$$\sin\left(\frac{(1)\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)\dots$$

$$\sin\left(\frac{(i+n)\pi}{2n}\right)\frac{\sin\left(\frac{(i-1)\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{(i)\pi}{2n}\right)\dots\sin\left(\frac{(i+n-2)\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{(2i-2)\pi}{2n}\right)}$$

$$ab = \frac{(-1)^{n-i}C_iD_n}{\sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)}$$

$$D_n = \sin\left(\frac{(1)\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{(2)\pi}{2n}\right)\dots\sin\left(\frac{(2n-3)\pi}{2n}\right)$$

$$C_k = \cos\left(\frac{k}{n-1}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{2(i+n-2)\pi}{2n}\right) = C_{i-1}$$

وهذا يعطي $C_i = \frac{1}{2}$، ويؤدي الي صيغة دالة الوزن لكل $2 \le i \le n-1$

$$w_i = \frac{1}{\prod_{i\neq j}^{n}(x_i - x_j)} = (-1)^i$$

والآن في حالة $i = 1$ وهذا يعطي $C_1 = 1$ ويؤدي الي صيغة دالة الوزن عندما $i = 1$ تكون

$$w_i = \frac{1}{\prod_{i\neq j}^{n}(x_i - x_j)} = (-1)^i\frac{1}{2}$$

5.الاستكمال بكثيرات حدود تشيبيشيف Interpolation of Chebyshev Polynomials [2]

كثيرات حدود تشيبيشيف من الدرجة n تكون متعامدة بشكل منفصل علي مجموعة جذور $\{x_k\}$، خاصية التعامد تمنحنا صيغة استكمال فعالة للغاية. و نحصل علي كثيرات الحدود $P_n(x)$ من الدرجة n لاستكمال $f(x)$ كمجموع كثيرات حدود تشيبيشيف بالصيغة التالية :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n}{}' f(x_k)T_i(x) \qquad = \sum_{i=0}^{n}{}' c_i[T_i(x)T_j(x_k)]$$

حيث أن ‘تشير الي ان الحد الاول في المجموع يكون مقسوم علي 2. حيث

$$c_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}{}' f(x_k)$$

$$c_i = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n}{}' f(x_k)\,T_j(x_k)$$

x_k هي جذور كثيرات حدود تشيبيشيف في الفترة المعنية، و $f(x_k)$ هي قيمة الدالة عند جذور تشيبيشيف

$$T_j(x_k) = \frac{\cos j(2k-1)}{2n}$$

الاستكمال بكثيرات حدود تشيبيشيف يحتاج الى $O(n\log n)$ من العمليات الحسابية ويعطي نتائج جيدة وأفضل من الاستكمال بلاغرانج المعدلة الثانية Barycentric formula وأكثر دقة. ومع ذلك، تتميز لاغرانج المعدلة تتميز بأنها يمكن استخدامها مع أي نقاط استكمال، في حين أنّ الاستكمال بكثيرات حدود تشيبيشيف نستخدم نقاط تشيبيشيف فقط. توزيع نقاط تشيبيشيف يقلل من الخطأ الكلي للاستكمال، وتعتبر أكثر استقراراً عددياً من كثيرات حدود لاغرانج التقليدية.

6.امثلة عددية

سنركز هنا على الدالة $f(x) = \frac{1}{1+a^2x^2}$ المعروفة بدالة رونج، وهي دالة شهيرة تستخدم غالبا لتوضيح مشكلة شائعة في التقريب باستخدام كثيرات الحدود. تظهر هذه الدالة أن استخدام كثيرات حدود من درجة عالية في التقريب قد يؤدي الي نتائج غير دقيقة بشكل كبير.

الاستكمال بكثيرات حدود لاغرانج: توضح الجداول التالية النتائج العددية لاستكمال الدالة $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ بكثيرات حدود لاغرانج عند نقاط متساوية البعد وعند جذور تشيبيشيف، عندما $n = 8$ و $n = 32$.

جدول 1: الاستكمال بكثيرات حدود لاغرانج عند n=8

x	$f(x)$	عند نقاط متساوية البعد	عند نقاط تشيبيشيف

−4.495	0.0019	0.0285	0.0036
−2.374	0.0074	0.00068	0.0116
−0.0505	0.9401	0.0489	0.04905
0.0505	0.9401	0.0489	0.04905
2.374	0.0074	0.00068	0.0116
4.495	0.0019	0.0285	0.0036

جدول 2: الاستكمال بكثيرات حدود لاغرانج عند n=32

x	$f(x)$	*عند نقاط متساوية البعد*	*عند نقاط تشيبيشيف*
−4.8990	0.0016	3.687×10^{4}	0.0008
−2.4030	0.0068	0.0147	0.0100
−1.3721	0.0208	0.008	0.0299
1.3721	0.0208	0.008	0.0299
2.4030	0.0068	0.0147	0.0100
4.8990	0.0016	3.687×10^{4}	0.0008

الاستكمال بفروق القسمة لنيوتن : توضح الجداول التالية النتائج العددية لاستكمال الدالة $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ بفروق القسمة لنيوتن عند نقاط متساوية البعد وعند جذور تشيبيشيف، عند $n=8$

جدول 3: الاستكمال بفروق القسمة لنيوتن عند n=8

x	f(x)	*عند نقاط متساوية البعد*	*عند نقاط تشيبيشيف*
−0.899	0.0471	0.2187	0.0635
−0.5152	0.1310	0.07	0.1502
−0.0909	0.8288	0.7151	0.5865
0.0909	0.8288	0.7151	0.5865

0.5152	0.1310	0.07	0.1502
0.899	0.0471	0.2187	0.0635

$n = 32$

جدول 4: الاستكمال بفروق القسمة لنيوتن عند n=32

x	$f(x)$	$p(x)$
−0.9095	0.547	0.5473
−0.68884	0.6789	0.6786
−0.4576	0.8271	0.8270
0.4576	0.8271	0.8270
0.68884	0.6789	0.6786
0.9095	0.547	0.5473

الاستكمال بطريقة لاغرانج المعدلة الاولى الجدول التالي يبين النتائج العددية لاستكمال الدالة $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ بطريقة لاغرانج المعدلة الاولى عند نقاط متساوية البعد $n = 32$

جدول 5: الاستكمال بطريقة لاغرانج المعدلة الاولى لنقاط متساوية البعد عند n=32

x	$f(x)$	$p(x)$
−0.74241	0.6560	0.6560
−0.5172	0.7889	0.7889
−0.3793	0.8742	0.8742
0.3793	0.8742	0.8742
0.5172	0.7889	0.7888
0.74241	0.6560	0.6560

الجدول التالي يبين النتائج العددية لاستكمال الدالة $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ بطريقة لاغرانج المعدلة الأولى عند جذور كثيرات حدود تشيبيشيف عند $n = 32$

جدول 6: الاستكمال بطريقة لاغرانج المعدلة الاولى لجذور كثيرات حدود تشيبيشيف عند n=32

x	$f(x)$	$p(x)$
−0.7931	0.6139	0.6139
−0.5862	0.7442	0.7441
−0.1724	0.9711	0.9711
0.1724	0.9711	0.9711
0.5862	0.7442	0.7441
0.7931	0.6139	0.6139

الاستكمال بطريقة لاغرانج المعدلة الثانية Barycentric formula: الجدول يبين النتائج العددية للاستكمال بطريقة لاغرانج المعدلة الثانية Barycentric formula عند نقاط متساوية البعد $n = 32$

جدول 7: الاستكمال بطريقة لاغرانج المعدلة الثانية Barycentric formula لنقاط متساوية البعد عند n=32

x	$f(x)$	$p(x)$
−0.7071	0.6667	0.6667
−0.4541	0.8291	0.8291
−0.3090	0.9128	0.9128
0.3090	0.9128	0.9128
0.4541	0.8291	0.8291
0.7071	0.6667	0.6667

الجدول يبين النتائج العددية للاستكمال بطريقة لاغرانج المعدلة الثانية Barycentric formulaعند جذور تشيبيشيف من النوع الاول $n = 32$

جدول 8: الاستكمال بطريقة لاغرانج المعدلة الثانية Barycentric formula لجذور تشيبيشيف من النوع الاول عند n=32

x	$f(x)$	$p(x)$
−0.8621	0.5737	0.0573
−0.5886	0.7448	0.7448
−0.0344	0.9988	1

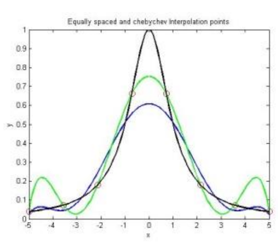
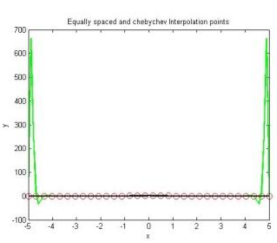
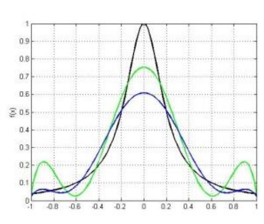
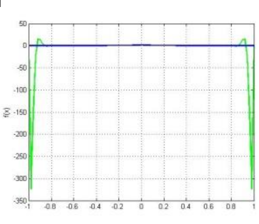
0.0344	0.9988	1
0.5886	0.7448	0.7448
0.8621	0.5737	0.0573

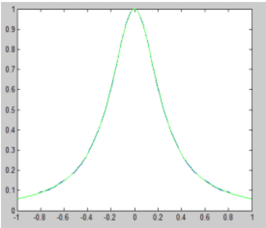
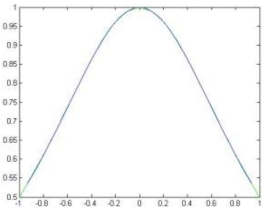
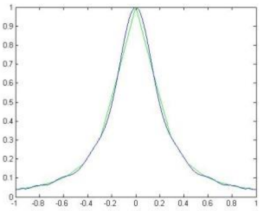
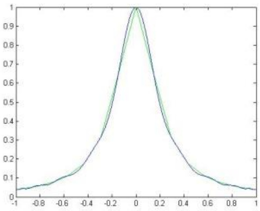
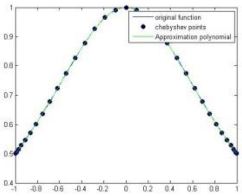
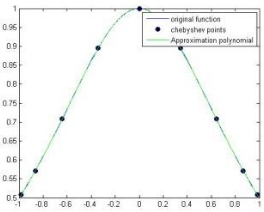
الاستكمال بكثيرات حدود تشيبيشيف: الجدول التالي لاستكمال الدالة

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ بكثيرات حدود تشيبيشيف لجذور تشيبيشيف من النوع الاول عند $n = 32$

جدول 8: الاستكمال بكثيرات حدود تشيبيشيف لجذور تشيبيشيف من النوع الاول عند n=32

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{p(x)}$
−0.9095	0.547	0.5473
−0.68884	0.6789	0.6786
−0.4576	0.8271	0.8270
0.4576	0.8271	0.8270
0.68884	0.6789	0.6786
0.9095	0.547	0.5473

<table dir="rtl">
<tr><th colspan="2">الاستكمال بكثيرات حدود لاغرانج</th><th colspan="2">الاستكمال بفروق القسمة لنيوتن</th></tr>
<tr><td>نقاط متساوية البعد وعند نقاط تشيبيشيف</td><td>نقاط متساوية البعد وعند نقاط تشيبيشيف</td><td>نقاط متساوية البعد وعند نقاط تشيبيشيف</td><td>نقاط متساوية البعد وعند نقاط تشيبيشيف</td></tr>
<tr><td>$n = 8$</td><td>$n = 32$</td><td>$n = 8$</td><td>$n = 32$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">الاستكمال بكثيرات لاغرانج المعدلة الاولى</td><td colspan="2">الاستكمال بكثيرات لاغرانج المعدلة الثانية</td></tr>
</table>

Barycentric			
عند نقاط تشيبيشيف	نقاط متساوية البعد	عند نقاط تشيبيشيف	نقاط متساوية البعد
$n = 32$	$n = 8$	$n = 32$	$n = 8$
			
الاستكمال بكثيرات حدود تشيبيشيف		الدالة الاصلية استكمال بكثيرات حدود لاغرانج عند نقاط متساوية البعد استكمال عند نقاط تشيبيشيف	
عند نقاط تشيبيشيف			
$n = 8$	$n = 8$		
			

7. مناقشة

تظهر النتائج الموضحة في الجدول (9) التالي مقارنة واضحة لمقدار الخطأ الناتج عن طرق الاستكمال المختلفة للدالة

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

عند نقاط متساوية البعد وعند جذور كثيرات حدود تشيبيشيف. في حين عانت طريقة لاغرانج التقليدية من خطأ كبير وتذبذب ملحوظ عند الأطراف بسبب ظاهرة رونج، أظهرت طرق فروق القسمة لنيوتن وتحسينات لاغرانج المعدلة الأولى والثانية أداء أفضل بقدر ملحوظ. حيث حققت النسخة المعدلة الأولى خطأ منخفضا جدا، بينما كانت النسخة المعدلة الثانية الأكثر تميزا بأقل خطأ على الاطلاق. أما الاستكمال بكثيرات حدود تشيبيشيف، فقد أظهر نتائج ممتازة مع خطأ ضئيل، مما يؤكد فعاليتها، خاصة عند استخدامه مع نقاط متساوية البعد.

هذه النتائج تسلط الضوء على أهمية اختيار طريقة الاستكمال المناسبة، حيث أن تحسينات لاغرانج

وطريقة تشيبيشيف توفر استقرارا ودقة أعلى مقارنة بالطرق التقليدية.

الجدول9 : مقارنة لمقدار الخطأ الناتج للاستكمال

طريقة الاستكمال	مقدار الخطأ عند نقاط متساوية البعد n=32	مقدار الخطأ عند جذور كثيرات حدود تشيبيشيف n=32
كثيرات حدود لاغرانج	662.8	0.0049
فرق القسمة لنيوتن	562.5	0.0038
نسخة لاغرانج المعدلة الاولى	4.65×10^{-5}	3.79×10^{-6}
نسخة لاغرانج المعدلة الثانية	1.116×10^{-16}	2.23×10^{-16}
بكثيرات حدود تشيبيشيف	-----------	0.97619×10^{-11}

8.الخلاصة

عند استخدام كثيرات حدود لاغرانج التقليدية للاستكمال عند نقاط متساوية البعد، تظهر تذبذبات واضحة عند الأطراف مع زيادة عدد نقاط الاستكمال. وهو ما ينطبق ايضا على فروق القسمة لنيوتن إلا أنها مكنتنا من حل مشكلة إعادة الحسابات من جديد في حالة إضافة نقطة جديدة للاستكمال.

عند استخدام جذور تشيبيشيف نتحصل علي نتائج أفضل من الاستكمال بكثيرات الحدود لاغرانج التقليدية و فروق القسمة لنيوتن، رغم أنها تقدم حلا لمشكلة إعادة الحسابات عند إضافة نقاط جديدة. بالمقابل، يؤدي استخدام جذور تشيبيشيف إلى تحسينات ملحوظة في نتائج الاستكمال، حيث يقلل من تأثير الأخطاء الناتجة عن الاستكمال عند نقاط متساوية البعد بشكل كبير. توفر الطرق المعدلة الأولى والثانية تحسينات إضافية في دقة نتائج الاستكمال عند كلا النوعين من النقاط، مما يجعلها الخيار الأمثل مقارنة بالطرق التقليدية للاستكمال في حالة دالة رونج. تعتبر جميع الطرق المدروسة في هذه الورقة مفيدة في سياقات مختلفة، حيث تعتمد الأفضلية على طبيعة الدالة وعدد و نوع النقاط المستخدمة. ومع أداء متميز من ذلك، تعتبر صيغة Barycentric الخيار الأفضل من حيث النتائج و الدقة. مما يجعلها الخيار المفضل في العديد من التطبيقات

العملية. يعد الاستكمال بكثيرات حدود تشيبيشيف باستخدام جذورها أداة فعالة لتحسين نتائج التقريب وتقليل الخطأ الكلي بشكل كبير.

9.المراجع

1. Abumaryam S. A (2018) The Convergence of Polynomial Interpolation and Runge Phenomenon. Sirte University Journal. Sirte.
2. Abumaryam S. A (2018) Differentiation Matrix By Chebyshev Polynomial. The second annual conference on theories and applications of basic and biosciences. Misuratau.
3. Abumaryam S. A (2018) The Convergence Rates Chebyshev Interpolation. Sebha. Journal of pure and applied sciences. ISS 2521-9200.
4. Baltenspergerg R. , Trummkr R. (2003). Spectral Differencing with A Twist, SIAM REVIEW. VOL. 24. SS 5 .
5. Berutt. J and Trefethen (2004) Barycentric Lagrange Interpolation. sciences for industrial and applied mathematics, SIAM REVIEW. VOL .46 . No 3 , PP . 501-517..
6. Chen J.Y (2017) Numerical Comparisons Of Polynomials International. Taiwan :Journal of applied sciences and mathematics. ISSN:2394-2894 . IGASM.
7. Mason J.C and Handscomb D.C (2003) Chebyshev Polynomials , CRC press LLC.
8. Robert M. and Sevyeri L. (2020) The Rung Example For Interpolation And Wilkinson's Examples For Root Finding . VOL V63 NO 1, PP. 231-243 . SIAM REVIEW.
9. Salzer H. (1927). **Lagrangian Interpolation At The Chebyshev,** $x_v , v \equiv \cos\left(\frac{v\pi}{n}\right)$ $v = 0(1)n$, some unnoted advantages, 15(2):156-159: computer Journal. **H**
10. Taylor W. (1945). **Metod Of lagrangian Curvilinear Interpolation**. Journal Of Researc Of The National Bureau Of Stanadard, VOL 35:151-155 .
11. Trefethen L. N(2002) Spectral Methods In MATLAB . SIAM.
12. Wang H. , Huybrechs D. and Vandewalle S. (2014) Explictt Barycentric Weights For Polynomial I Interpolation In The Roots Or Extrema Of Classical Orthogonal Polynomials .mathematics of computation:S 0025-5718-4 .
13. Yan T. (2021) Barycentric Prolate Interpolation And Pseudo Spectral Differentiation. Numerical Algorithms : mathematics subject classification. 65N35 .41A10 . 42C05 .